Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"
Proba pe echipe, clasele IX-XII
27 octombrie 2013

Soluţii

RUNDA a IV-a

Problema 1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\left[x^2\right]-5\cdot\left[x\right]-2=0,$ unde $\left[a\right]$ este partea întreagă a numărului real a.

Soluţie: Fie $\left[x\right]=p,\ p\in\mathbb{Z},\ p\le x<p+1.$ Să arătăm că $p\ge 0,$ adică $p\in\mathbb{N}$. Dacă $p=\left[x\right]=\dfrac{\left[x^2\right]-2}{5}$ şi dacă, prin absurd, $p<0,$ atunci $\left[x^2\right]<2$ şi cum

$\left[x^2\right]\ge 0\Rightarrow\left[x^2\right]\in\{0,1\}\Rightarrow p\in\left\{-\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right\}$, absurd.

$p\le x<p+1\Rightarrow p^2\le x^2<(p+1)^2\Rightarrow\left[x^2\right]=p^2+k,k\in\mathbb{N},0\le k\le 2p;$

$\left[x^2\right]-5\cdot\left[x\right]-2=0\Leftrightarrow p^2+k-5p-2=0\Rightarrow k=-p^2+5p+2;$

Dar $0\le \mathrm{k}\le 2\mathrm{p}\Rightarrow\ 0\le -p^2+5p+2\le 2\mathrm{p}\Rightarrow \mathrm{p}\in\{4,5\};$

$1.p=4\Rightarrow k=6\Rightarrow\left[x^2\right]=22\Rightarrow x\in\left[\sqrt{22},\sqrt{23}\right)$

$2.p=5\Rightarrow k=2\Rightarrow\left[x\right]=5;\left[x^2\right]=27$

Avem $5\le x<6;27\le x^2<28\Rightarrow x\in\left[\sqrt{27},\sqrt{28}\right).$

Mulţimea soluţiilor este $\left[\sqrt{22},\sqrt{23}\right)\cup\left[\sqrt{27},\sqrt{28}\right).$

Răspuns:S= $\left[\sqrt{22},\sqrt{23}\right)\cup\left[\sqrt{27},\sqrt{28}\right).$

Problema 2. Pentru $n\in\mathbb{N}^*,$ notăm cu $p(n)$ produsul cifrelor nenule ale lui $n.$ Să se calculeze $p(1)+p(2)+p(3)+...+p(1000)$.(Dacă numărul n are o singură cifră atunci $p(n)$ este acea cifră).

Soluţie: Numerele care au o singură cifră nenulă sunt de forma $\overline{i00},\ \overline{i0},\ i,$ unde $i\in\overline{1,9}.$

Suma produselor acestora este $3\cdot(1+2+3+...+9)$.

Numerele cu două cifre nenule sunt cele de forma $\overline{ij0},\ \overline{i0j},\ \overline{ij},$ unde $i,j\in\overline{1,9}$ şi suma produselor cifrelor nenule ale acestora este $3\cdot\sum(i\cdot j)=3\cdot(1+2+3+...+9)^2$.

Numerele cu trei cifre nenule sunt cele de forma $\overline{ijk},$ unde $i,j,k\in\overline{1,9}$ şi suma produselor acestora este $(1+2+3+...+9)^3$. Mai adăugăm $p(1000)=1$.

Atunci

$p(1)+p(2)+p(3)+...+p(1000)=1+3\cdot(1+2+3+...+9)+3\cdot(1+2+3+...+9)^2+(1+2+3+...+9)^3=$

$(1+1+2+3+...+9)^3=46^3=97336.$

Răspuns: 97336

Problema 3. Să se determine mulţimea punctelor M din planul unui romb $ABCD$ pentru care $MA\cdot MC+MB\cdot MD=AB^2$.

Soluţie: Alegem un sistem de coordonate xOy pentru care $A(a,0),B(0,b),C(-a,0),D(0,-b)$;

Fie punctul M de coordonate (x,y).

Condiţia problemei este : $\sqrt{(x-a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+a)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-b)^2}+\sqrt{x^2+(y+b)^2}=a^2+b^2.$

Folosind inegalitatea lui Cauchy, obţinem:

$\sqrt{(x-a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+a)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-b)^2}+\sqrt{x^2+(y+b)^2}\geq|x-a|\cdot|x+a|+y^2+x^2+|y-b|\cdot|y+b|\geq$

$(a-x)\cdot(a+x)+y^2+x^2+(b-y)\cdot(b+y)=a^2+b^2.$

Trebuie să avem egalitate.

$(a-x)\cdot(a+x)\geq 0\Leftrightarrow x\in[-a,a];\ (b-y)\cdot(b+y)\geq 0\Leftrightarrow y\in[-b,b]$

şi $y\cdot(a-x)=y\cdot(a+x)\Leftrightarrow x\cdot y=0$

Dacă

$x=0,y\in[-b,b]\Rightarrow M\in[BD];$

$y=0,x\in[-a,a]\Rightarrow M\in[AC]$

Mulţimea căutată este $[AC]\cup[BD]$.

Răspuns: $[AC]\cup[BD]$.

Problema 4. Dacă $n\in\mathbb{N}^*$, să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\cdot(1-\cos^2 x)\cdot\ldots\cdot(1-\cos^n x)}{\sin^{2n}x+\ln(1+x^{2n})+\sqrt[n]{1+x^{2n}}-1}$.

Soluţie:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot(1-\cos^2 x)\cdot\ldots\cdot(1-\cos^n x)}{\sin^{2n}x+\ln(1+x^{2n})+\sqrt[n]{1+x^{2n}}-1}=\lim_{x\to 0}\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\cos^k x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^{2n}}{\sin^{2n}x+\ln(1+x^{2n})+\sqrt[n]{1+x^{2n}}-1}=L_1\cdot L_2;$$

$$L_1=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^k x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x+\cos^2 x+\ldots+\cos^{k-1}x)}{x^2}=\frac{k}{2};$$

$$L_2=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2n}+\frac{\ln(1+x^{2n})}{x^{2n}}+\frac{(1+x^{2n})^{\frac{1}{n}}-1}{x^{2n}}}=\frac{1}{1+1+\frac{1}{n}}=\frac{n}{2n+1}.$$

$$L_1\cdot L_2=\frac{n\cdot n!}{2^n\cdot(2n+1)}$$

Răspuns: $\dfrac{n\cdot n!}{2^n\cdot(2n+1)}$